Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung

3. Auflage

Bearbeitet von Lehrern und Ingenieuren an beruflichen Schulen
(Siehe nächste Seite)

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 85021

Autoren des Buches „Mathematik für die Fachhochschulreife mit Vektorrechnung“

Josef Dillinger	München
Bernhard Grimm	Sindelfingen, Leonberg
Gerhard Mack	Stuttgart
Thomas Müller	Ulm
Bernd Schiemann	Stuttgart, Ulm

Lektorat: Bernd Schiemann

Bildentwürfe: Die Autoren

Bilderstellung und -bearbeitung: Verlag Europa Lehrmittel, 73760 Ostfildern

Das vorliegende Buch wurde auf der Grundlage der neuen amtlichen Rechtschreibregeln erstellt.

3. Auflage 2007, geänderter Nachdruck 2019
Druck 5 4

Alle Drucke derselben Auflage sind parallel einsetzbar, da sie bis auf die Behebung von Druckfehlern untereinander unverändert sind.

ISBN: 978-3-8085-8504-7

Umschlaggestaltung: Idee Bernd Schiemann, Ulm; Ausführung: Michael Maria Kappenstein, 60594 Frankfurt/Main

Satz, Grafik und Bildbearbeitung: Grafische Produktionen Jürgen Neumann, 97222 Rimpar

Druck: Drukarnia Dimograf Sp.zo.o, 43-300 Bielsko-Biala (PL)

Vorwort zur 1. Auflage

Das vorliegende Buch realisiert die Vorgaben der neuen Bildungspläne für den Erwerb der Fachhochschulreife im Fach Mathematik. Entsprechend den Vorgaben der Bildungspläne wird großer Wert auf die zunehmende Selbstorganisation des Lernprozesses, d. h. auf immer größer werdende Eigenständigkeit und Eigenverantwortung der Schülerinnen und Schüler im Erwerb von Wissen und Können, gelegt. Die mathematischen Inhalte werden vorwiegend anwendungsbezogen, d. h. an praktischen Beispielen eingeführt und behandelt. Jedoch kommen auch die theoretischen Grundlagen nicht zu kurz. Mit einer Einführung in den grafikfähigen Taschenrechner (GTR) wird ein Beitrag zur Medienkompetenz erfüllt.

Zur Förderung handlungsorientierter Themenbearbeitung enthält das Buch eine große Anzahl von Beispielen, anhand derer eine Vielzahl von Aufgaben zu lösen sind. Zu jeder Aufgabe ist die Lösung auf derselben Seite angegeben. Das Buch ist deshalb auch zum selbstständigen Lernen geeignet. Im Unterricht können bessere Schüler selbstständig die Aufgaben lösen, während schwächere Schüler gezielt durch den Lehrer betreut werden können. Ein didaktisch aufbereiteter Lösungsband mit ausführlichen Schritten zur Lösung sowie eine Formelsammlung ergänzen das Buch.

Um unterschiedliche Vorkenntnisse auszugleichen, beginnt das Buch mit den Kapiteln „Algebraische Grundlagen" und „Geometrische Grundlagen". Wenn keine Kennzeichnung des Zahlensystems angegeben ist, wird mit reellen Zahlen gearbeitet.

Die Hauptabschnitte des Buches sind

- **Algebraische Grundlagen**
- **Geometrische Grundlagen**
- **Vektorrechnung**
- **Analysis**
- **Differenzialrechnung**
- **Integralrechnung**
- **Komplexe Rechnung**
- **Prüfungsvorbereitung**
- **Aufgaben aus der Praxis**
- **Projektaufgaben**
- **Grafikfähiger Taschenrechner**
- **Selbstorganisiertes Lernen**
  Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

Vorwort zur 3. Auflage

Das Kapitel „Grafikfähiger Taschenrechner" enthält parallel zum GTR von CASIO jetzt auch einen GTR von Texas-Instruments.
Für das selbstständige Lernen und Üben ist das Kapitel 12 „Selbst organisiertes Lernen" mit vielen Übungsaufgaben und Prüfungsaufgaben angefügt worden. Der Benutzer des Buches findet bei den einzelnen Themen unten auf der Buchseite jeweils den Hinweis

⇒ [*Weitere Aufgaben im Kapitel 12*]

Ihre Meinung interessiert uns!

Teilen Sie uns Ihre Verbesserungsvorschläge, Ihre Kritik aber auch Ihre Zustimmung zum Buch mit.

Schreiben Sie uns an die E-Mail-Adresse: **info@europa-lehrmittel.de**

Die Autoren und der Verlag Europa-Lehrmittel — Herbst 2007

Inhaltsverzeichnis

8 Prüfungsvorbereitung

9 Aufgaben aus der Praxis und Projektaufgaben

10 Projektaufgaben

11 Grafikfähiger Taschenrechner GTR

12 Selbst organisiertes Lernen Übungsaufgaben – Prüfungsaufgaben

13 Anhang

Mathematische Fachbegriffe

Ableitungsfunktion
Ist die Funktion f'(x), deren Werte die Steigungen des Grafen der Funktion f(x) angeben.

Abgestumpfte Körper
Kegelstumpf und Pyramidenstumpf werden so bezeichnet.

Achsenschnittpunkte
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, z. B. x-, y- oder z-Achse.

Äquivalenzumformung
Umformen von Gleichungen, bei denen sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Arkus-Funktion
Als Arkus-Funktionen werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen bezeichnet.

Asymptote
Eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert, ohne sie zu berühren oder zu schneiden.

Biquadratische Gleichung
Es handelt sich um eine Gleichung 4. Grades mit nur geradzahligen Exponenten ($ax^4 + bx^2 + c = 0$).

Differenzenquotient
Ist die Steigung der Sekante durch zwei Punkte der Funktion.

Differenzialquotient
Grenzwert des Differenzenquotienten, entspricht der Steigung der Tangente.

Differenzierbarkeit von Funktionen
Eine Funktion ist differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle eine eindeutig bestimmte Tangente mit einer endlichen Steigung hat.

Ebenengleichung
Fläche, die z. B. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, festgelegt ist.

e-Funktion
Exponentialfunktionen mit der Basis e, natürliche Exponentialfunktionen genannt.

Exponentialfunktion
Bei der Exponentialfunktion ist die Hochzahl die unabhängige Variable.

Funktion
Eindeutige und eineindeutige Zuordnungen von Elementen nennt man Funktionen.

Ganze Zahlen
Sie können positiv, negativ oder null sein.

Ganzrationale Funktion
Ganzrationale Funktionen bestehen aus der Addition verschiedener Potenzfunktionen.

Gebrochenrationale Funktion
Bei einer gebrochenrationalen Funktion steht im Zähler das Zählerpolynom und im Nenner das Nennerpolynom.

Gerade
Das Schaubild für die Darstellung linearer Zusammenhänge (lineare Funktion) heißt Gerade.

Gleichung
Eine Gleichung entsteht durch Verbindung zweier Terme durch ein Gleichheitszeichen.

GTR
Grafikfähiger Taschenrechner. Enthält ein Anzeigefeld zur grafischen Darstellung von z. B. Schaubildern, Wertetabellen.

Hessesche Normalenform HNF
In der Normalengleichung wird der Normaleneinheitsvektor statt des Normalenvektors verwendet.

Imaginäre Zahlen
Scheinbare (unvorstellbare) Zahlen, z. B. j; 3j; –2j.

Integrieren
Integrieren heißt, eine abgeleitete Funktion wieder in die ursprüngliche Form zurückzuführen.

Irrationale Zahlen
Sind Dezimalzahlen mit unendlich vielen, nichtperiodischen Nachkommaziffern, z. B. Wurzelzahlen, die Konstanten π und e.

Kartesische Koordinaten
Achsen stehen senkrecht aufeinander und haben die Einheit 1 LE.

Komplexe Zahlen
Zahlen, die reell und/oder imaginär sind.

Konstante Funktion
Funktionswert bleibt für alle x konstant.

Koordinatensystem
Mit Koordinaten (= Zahlen, die die Lage von Punkten angeben) lassen sich diese in einer Ebene oder im Raum eindeutig festlegen.

Lineare Funktion
Ganzrationale Funktion 1. Grades.

Lineares Gleichungssystem LGS
System von Lineargleichungen, deren Variablen die Hochzahl 1 enthalten.

Logarithmische Funktionen
Sie sind die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Logarithmus
Logarithmieren heißt, die Hochzahl (= Exponent) einer bestimmten Potenz berechnen.

Natürliche Zahlen
Positive, ganze Zahlen einschließlich der Null.

Numerische Integration
Numerische Integration heißt, den Flächeninhalt näherungsweise berechnen, z. B. durch Auszählen von Flächen. (Anwendung, wenn keine Stammfunktion bekannt ist.)

Nullstellen
Die x-Werte der Schnittpunkte eines Schaubildes mit der x-Achse nennt man Nullstellen.

Orthogonal
Rechtwinklig. Orthogonale (rechtwinklige) Geraden haben einen Winkel von 90° zueinander.

Parabel
Schaubild einer quadratischen Funktion.

Pol
Stelle, an der eine senkrechte Asymptote vorliegt.

Polynom
Bezeichnet in der Mathematik eine vielgliedrige Größe.

Potenz
Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren.

Potenzfunktion
Sind Funktionen, die den Term x^n enthalten.

Quadranten
Zeichenebenen in Koordinatensystemen.

Quadratische Gleichung
Ist eine Gleichung 2. Grades ($ax^2 + bx + c = 0$).

Quadratwurzel
Beim Wurzelziehen (Radizieren) wird der Wert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt.

Rationale Zahlen
Zahlen, die durch Brüche darstellbar sind.

Reelle Zahlen
Zahlen, die rational oder irrational sind.

Relation
Eindeutige oder mehrdeutige Zuordnung.

Skalar
Größe, die durch einen bestimmten reellen Zahlenwert festgelegt ist.

Spitze Körper
Pyramide und Kegel werden als spitze Körper bezeichnet (Prismatische Körper).

Spurgerade
Die gemeinsamen Punkte (Schnittpunkte) einer Ebene mit einer Koordinatenebene bilden die Spurgerade.

Spurpunkte
Spurpunkte nennt man die Durchstoßpunkte (Schnittpunkte) einer Geraden mit den Koordinatenebenen.

Steigung
Als Steigung wird das Verhältnis des Δy-Wertes zum Δx-Wert eines Steigungsdreiecks, z. B. einer Tangente, bezeichnet.

Stetigkeit von Funktionen
Stetige Funktionen können durch einen lückenlosen, zusammenhängenden Kurvenzug dargestellt werden.

Term
Mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen kann.

Trigonometrische Funktionen
Winkelfunktionen, z. B. sin x, tan x, arctan x.

Umkehrfunktion
Funktion, bei der die Zuordnung der Variablen vertauscht wird.

Variablen
Das sind Buchstaben, z. B. x, y, an deren Stelle Zahlen der Grundmenge gesetzt werden.

Vektor
Physikalische oder mathematische Größe, die durch einen Pfeil dargestellt wird und durch Richtung und Betrag festgelegt ist.

Wurzelfunktionen
Das sind Potenzfunktionen, die gebrochene Hochzahlen enthalten.

1 Algebraische Grundlagen

1.1 Term

Terme können Zahlen, z.B. -1; $\frac{1}{2}$; 2 oder Variablen, z.B. a; x; y, sein. Werden Terme durch Rechenoperationen verbunden, so entsteht wieder ein Term.

1.2 Gleichung

Eine Gleichung besteht aus einem Linksterm T_l und aus einem Rechtsterm T_r.

> Werden zwei Terme durch das Gleichheitszeichen miteinander verbunden, so entsteht die Gleichung $T_l = T_r$.

Beispiel 1: Gleichung
Stellen Sie die beiden Terme T_l: $x + 2$ und T_r: -4 als Gleichung dar.
Lösung: $\mathbf{x + 2 = -4}$

Werden an Gleichungen Rechenoperationen durchgeführt, so muss auf jeder Seite der Gleichung diese Rechenoperation durchgeführt werden **(Tabelle 1)**. Eine Gleichung mit mindestens einer Variablen stellt eine Aussageform dar. Diese Aussageform kann eine wahre oder falsche Aussage ergeben, wenn den Variablen Werte zugeordnet werden.

> Ein Wert x einer Gleichung heißt Lösung, wenn beim Einsetzen von x in die Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Beispiel 2: Lösung einer Gleichung
Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x + 2 = -4$

Lösung: $x + 2 = -4 \quad | -2$
$x + 2 - 2 = -4 - 2$
$\mathbf{x = -6}$

1.3 Definitionsmenge

Die Definitionsmenge eines Terms kann einzelne Werte oder ganze Bereiche aus der Grundmenge ausschließen **(Tabelle 2)**.

Beispiel 3: Definitionsmenge
Die Definitionsmenge der Gleichung $\sqrt{x-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$; $x \in \mathbb{R}$ ist zu bestimmen.

Lösung: Die Definitionsmenge D_1 des Linksterms wird durch die Wurzel eingeschränkt.
$D_1 = \{x | x \geq 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
Die Definitionsmenge D_2 des Rechtsterms wird durch den Nenner eingeschränkt. $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
Für die Gesamtdefinitionsmenge D gilt:
$\mathbf{D = D_1 \cap D_2 = \{x | x > 1 \wedge x \in \mathbb{R}\}}$

Tabelle 1: Rechenoperationen bei Gleichungen $T_l = T_r$

Operation	Allgemein	Beispiel
Addition	$T_l + T = T_r + T$	$x - a = 0 \quad \| + a$ $x - a + a = 0 + a$ $x = a$
Subtraktion	$T_l - T = T_r - T$	$x + a = 0 \quad \| - a$ $x + a - a = 0 - a$ $x = -a$
Multiplikation	$T_l \cdot T = T_r \cdot T$	$\frac{1}{2} \cdot x = 1 \quad \| \cdot 2$ $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 = 1 \cdot 2$ $x = 2$
Division	$\frac{T_l}{T} = \frac{T_r}{T}$; $T \neq 0$	$2 \cdot x = 4 \quad \| : 2$ $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{4}{2}$ $x = 2$

Tabelle 2: Einschränkung des Definitionsbereichs in $\mathbb{R}$

Term	Einschränkung	Beispiel
Bruchterm $T_B = \frac{Z(x)}{N(x)}$	$N(x) \neq 0$	$T(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $x - 1 \neq 0$ $x \neq 1$ $D = \{x \| x \neq 1\}$
Wurzelterm $T_W = \sqrt{x}$	$x \geq 0$ x größer gleich 0	$T(x) = \sqrt{x-1}$ $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$ $D = \{x \| x \geq 1\}$
Logarithmusterm $T_l = \log_a x$	$x > 0$ x größer 0	$T(x) = \log_{10} x$ $x > 0$ $D = \{x \| x > 0\}$

Bei Aufgaben aus der Technik oder Wirtschaft ergeben sich häufig einschränkende Bedingungen in technischer, technologischer oder ökonomischer Hinsicht. So kann die Zeit nicht negativ sein oder die Temperatur nicht kleiner 273 K werden. Diese eingeengte Definitionsmenge ist dann die eigentliche Definitionsmenge einer Gleichung.

Aufgaben:

1. Lösungsmenge. Bestimmen Sie die Lösung für $x \in \mathbb{R}$.

a) $4(2x - 6) = 2x - (x + 4)$

b) $(2x - 1)(3x - 2) = 6(x + 2)(x - 4)$

c) $\frac{x+2}{5} - 2 = 4$ **d)** $\frac{2-x}{2} + a = 1$

e) $\frac{2x-a}{4} - b = 2$ **f)** $\frac{3x-5}{5} = \frac{2x-3}{4}$

2. Lösen von Gleichungen. Lösen Sie die Gleichungen nach allen Variablen auf.

a) $h = \frac{1}{2}g \cdot t^2$ **b)** $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3. Definitions- und Lösungsmenge. Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{2x+2} = \sqrt{4x-8}$ **b)** $\frac{3x-1}{x+2} = \frac{2-3x}{2-x}$

Lösungen:

1. a) $x = \frac{20}{7}$ **b)** $x = -10$ **c)** $x = 28$ **d)** $x = 2a$
e) $x = \frac{1}{2}a + 2b + 4$ **f)** $x = \frac{5}{2}$

2. a) $g = \frac{2h}{t^2}$; $t = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$ **b)** $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $R_1 = \frac{R \cdot R_2}{R_2 - R}$; $R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$

3. a) $D = \{x | x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$; $L = \{5\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $L = \left\{\frac{6}{11}\right\}$

⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 12]

1.4 Potenzen

1.4.1 Potenzbegriff

Die Potenz ist die Kurzschreibweise für das Produkt gleicher Faktoren. Eine Potenz besteht aus der Basis (Grundzahl) und dem Exponenten (Hochzahl). Der Exponent gibt an, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert werden muss.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-Faktoren}} = a^n$$

$$a^n = b$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a Basis; a > 0   n Exponent

b Potenzwert

Beispiel 1: Potenzschreibweise

Schreiben Sie
a) das Produkt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ als Potenz und
b) geben Sie den Potenzwert an.

Lösung: a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{2^5}$ b) $2^5 = \mathbf{32}$

1.4.2 Potenzgesetze

Potenz mit negativem Exponenten

Eine Potenz, die mit positivem Exponenten im Nenner steht, kann auch mit einem negativen Exponenten im Zähler geschrieben werden. Umgekehrt kann eine Potenz mit negativem Exponenten im Zähler als Potenz mit positivem Exponenten im Nenner geschrieben werden.

Beispiel 2: Exponentenschreibweise

Schreiben Sie die Potenzterme a) 2^{-3}; b) 10^{-3} mit entgegengesetztem Exponenten und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = \mathbf{0{,}125}$

b) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \mathbf{0{,}001}$

Beispiel 3: Physikalische Benennungen

Schreiben Sie folgende physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

a) $m \cdot s^{-2}$ b) $U \cdot min^{-1}$ c) $\frac{m}{s}$

Lösung:

a) $m \cdot s^{-2} = \mathbf{\frac{m}{s^2}}$ b) $U \cdot min^{-1} = \mathbf{\frac{U}{min}}$ c) $\frac{m}{s} = \mathbf{m \cdot s^{-1}}$

Addition und Subtraktion

Gleiche Potenzen oder Vielfaches von gleichen Potenzen, die in der Basis und im Exponenten übereinstimmen, lassen sich durch Addition und Subtraktion zusammenfassen **(Tabelle 1)**.

Beispiel 4: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Die Potenzterme $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$ sind zusammenzufassen.

Lösung: $3x^3 + 4y^2 + x^3 - 2y^2 + 2x^3$
$= (3 + 1 + 2)x^3 + (4 - 2)y^2 = \mathbf{6x^3 + 2y^2}$

Tabelle 1: Potenzgesetze

Regel, Definition	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Potenzen dürfen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Exponenten und dieselbe Basis haben.	$r \cdot a^n \pm s \cdot a^n$ $= (r \pm s) \cdot a^n$
Multiplikation Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Division Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält.	$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$
Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potenzieren Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Definition Jede Potenz mit dem Exponenten null hat den Wert 1.	$a^0 = 1$; für $a \neq 0$

Multiplikation von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Potenzen als Produkt schreibt und dann ausmultipliziert oder indem man die Exponenten addiert.

Beispiel 1: Multiplikation
Berechnen Sie das Produkt $2^2 \cdot 2^3$ und geben Sie den Potenzwert an.

Lösung:

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = \mathbf{32}$

oder $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = \mathbf{32}$

Beispiel 2: Flächen- und Volumenberechnung

a) Die Fläche des Quadrates mit a = 2 m **(Bild 1)** und

b) das Volumen des Würfels für a = 2 m ist zu berechnen.

Lösung:

a) $A = a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = \mathbf{a^2}$
$A = 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 2 \cdot 2\,\text{m} \cdot \text{m} = 2^2\,\text{m}^2 = \mathbf{4\,m^2}$

b) $V = a \cdot a \cdot a = a^1 \cdot a^1 \cdot a^1 = a^{1+1+1} = \mathbf{a^3}$
$= 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = 2 \cdot 2 \cdot 2\,\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{m}$
$= 2^3\,\text{m}^3 = \mathbf{8\,m^3}$

Division von Potenzen

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man den Quotienten in ein Produkt umformt und dann die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert.

Beispiel 3: Division
Der Potenzterm $\frac{2^5}{2^3}$ ist zu berechnen.

Lösung:

$\frac{2^5}{2^3} = 2^5 \cdot \frac{1}{2^3} = 2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

oder $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = \mathbf{4}$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man das Produkt der Potenzen bildet und die Regeln für die Multiplikation von Potenzen anwendet oder indem man die Exponenten multipliziert.

Beispiel 4: Potenzieren
Berechnen Sie die Potenzterme

a) $(2^2)^3$ b) $(-3)^2$ c) -3^2

Lösung:

a) $(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^6 = \mathbf{64}$
oder $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

b) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = \mathbf{9}$ c) $-3^2 = -(3 \cdot 3) = \mathbf{-9}$

$(-a)^2 = a^2$ $-a^2 = -(a^2)$

a Basis; a > 0

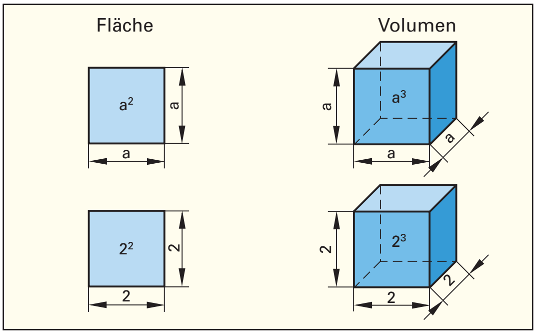

Bild 1: Fläche und Volumen

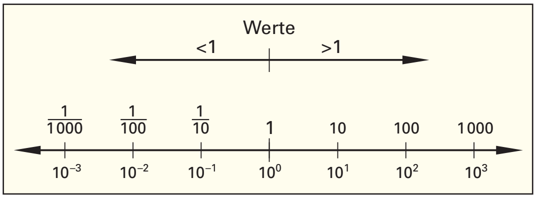

Bild 2: Zehnerpotenzen

Tabelle 1: Zehnerpotenzen, Schreibweise

ausgeschriebene Zahl	Potenz	Vorsatz bei Einheiten	
1 000 000 000	10^9	G	(Giga)
1 000 000	10^6	M	(Mega)
1 000	10^3	k	(Kilo)
100	10^2	h	(Hekto)
10	10^1	da	(Deka)
1	10^0	–	
0,1	10^{-1}	d	(Dezi)
0,01	10^{-2}	c	(Centi)
0,001	10^{-3}	m	(Milli)
0,000 001	10^{-6}	µ	(Mikro)
0,000 000 001	10^{-9}	n	(Nano)

Potenzen mit der Basis 10 (Zehnerpotenzen)

Potenzen mit der Basis 10 werden sehr häufig als verkürzte Schreibweise für sehr kleine oder sehr große Zahlen verwendet. Werte größer 1 können als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit positivem Exponenten, Werte kleiner 1 als Vielfaches von Zehnerpotenzen mit negativem Exponenten dargestellt werden (**Bild 2** und **Tabelle 1**).

Beispiel 5: Zehnerpotenzen
Schreiben Sie die Zehnerpotenzen

a) 20 µH b) 10 ml c) 3 kHz

Lösung:

a) $20 \cdot 10^{-6}$ H b) $10 \cdot 10^{-3}\,\ell$ c) $3 \cdot 10^3$ Hz

1.5 Wurzelgesetze

1.5.1 Wurzelbegriff

Das Wurzelziehen oder Radizieren (von lat. radix = Wurzel) ist die Umkehrung des Potenzierens. Beim Wurzelziehen wird derjenige Wurzelwert gesucht, der mit sich selbst multipliziert den Wert unter der Wurzel ergibt. Eine Wurzel besteht aus dem Wurzelzeichen, dem Radikanden unter dem Wurzelzeichen und dem Wurzelexponenten. Bei Quadratwurzeln darf der Wurzelexponent 2 weggelassen werden $\Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Eine Wurzel kann auch in Potenzschreibweise dargestellt werden. Deshalb gelten bei Wurzeln auch alle Potenzgesetze.

Beispiel 1: Potenzschreibweise und Wurzelziehen

Der Wurzelterm $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$ ist

a) in Potenzschreibweise darzustellen und

b) der Wert der Wurzel zu bestimmen.

Lösung:

a) $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4^1} = \mathbf{4^{\frac{1}{2}}}$ b) $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$; denn $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$

$\sqrt[n]{a} = x;\ a \geq 0$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ a \geq 0$

n Wurzelexponent a Radikand, Basis

x Wurzelwert m, $\frac{m}{n}$ Exponent

1.5.2 Rechengesetze beim Wurzelrechnen

Addition und Subtraktion

Gleiche Wurzeln, die im Wurzelexponenten und im Radikand übereinstimmen, dürfen addiert und subtrahiert werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 2: Addition und Subtraktion von Wurzeln

Die Wurzelterme $3\sqrt{a}$, $-2\sqrt[3]{b}$, $+2\sqrt{a}$, $+4\sqrt[3]{b}$ sind zusammenzufassen.

Lösung:

$3\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{b} + 2\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} = (3+2)\sqrt{a} + (4-2)\sqrt[3]{b}$

$= \mathbf{5\sqrt{a} + 2\sqrt[3]{b}}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Ist beim Wurzelziehen der Radikand ein Produkt, so kann entweder aus dem Produkt oder aus jedem einzelnen Faktor die Wurzel gezogen werden. Bei einem Quotienten kann die Wurzel auch aus Zählerterm und Nennerterm gezogen werden **(Tabelle 1)**.

Beispiel 3: Multiplikation und Division

Berechnen Sie aus den Wurzeltermen $\sqrt{9 \cdot 16}$ und $\sqrt{\frac{9}{16}}$ den Wert der Wurzel.

Lösung:

$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = \mathbf{12}$

oder $\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = \mathbf{12}$

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \mathbf{0{,}75}$

oder $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{,}75}$

Tabelle 1: Wurzelgesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Addition und Subtraktion Wurzeln dürfen addiert und subtrahiert werden, wenn sie gleiche Exponenten und Radikanden haben.	$r \cdot \sqrt[n]{a} \pm s \cdot \sqrt[n]{a}$ $= (r \pm s) \cdot \sqrt[n]{a}$
Multiplikation Ist der Radikand ein Produkt, kann die Wurzel aus dem Produkt oder aus jedem Faktor gezogen werden.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Division Ist der Radikand ein Quotient, kann die Wurzel aus dem Quotienten oder aus Zähler und Nenner gezogen werden.	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Potenzieren Beim Potenzieren einer Wurzel kann auch der Radikand potenziert werden.	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Allgemeine Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$

Bei der Lösung des Wurzelterms $\sqrt[n]{a^n}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

gerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

ungerader Exponent: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Die Lösung einer Quadratwurzel ist immer positiv.

Beispiel 4: Zwei Lösungen

Warum müssen beim Wurzelterm $\sqrt[2]{a^2}$ zwei Fälle unterschieden werden?

Lösung:

$\sqrt[2]{a^2} = |a|$

Fall 1: **a für a > 0**

Fall 2: **–a für a < 0**

Beispiel 1: Für $|a| = 2$ gilt $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

1.6 Logarithmengesetze

1.6.1 Logarithmusbegriff

Der Logarithmus (von griech. logos = Verhältnis und arithmos = Zahl) ist der Exponent (Hochzahl), mit der man die Basis (Grundzahl) a potenzieren muss, um den Numerus (Potenzwert, Zahl) zu erhalten.

Einen Logarithmus berechnen heißt den Exponenten (Hochzahl) einer bestimmten Potenz zu berechnen.

Für das Wort Exponent wurde der Begriff Logarithmus eingeführt.

Beispiel 1: Logarithmus
Suchen Sie in der Gleichung $2^x = 8$ die Hochzahl x, sodass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

Lösung:
$2^x = 8$; $2^3 = 8$; $\Rightarrow \mathbf{x = 3}$

Die Sprechweise lautet: x ist der Exponent zur Basis 2, der zum Potenzwert 8 führt.

Die Schreibweise lautet: $x = \log_2 8 = 3$

$x = \log_a b$ $\qquad$ $a^x = b$

x Logarithmus (Hochzahl) $\quad$ a Basis; $a > 0$
b Numerus (Zahl)

1.6.2 Rechengesetze beim Logarithmus

Die Logarithmengesetze ergeben sich aus den Potenzgesetzen und sind für alle definierten Basen gültig **(Tabelle 1)**.

Mit dem Taschenrechner können Sie den Logarithmus zur Basis 10 und zur Basis e bestimmen. Dabei wird $\log_{10}$ mit log und $\log_e$ mit ln abgekürzt **(Tabelle 2)**.

Tabelle 1: Logarithmengesetze

Regel	algebraischer Ausdruck
Produkt Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.	$\log_a (u \cdot v)$ $= \log_a u + \log_a v$
Quotient Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.	$\log_a \left(\frac{u}{v}\right)$ $= \log_a u - \log_a v$
Potenz Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis.	$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$

Tabelle 2: Spezielle Logarithmen

Basis	Art	Schreibweise	Taschenrechner
10	Zehnerlogarithmus	$\log_{10}$; lg	log-Taste
e	Natürlicher Logarithmus	$\log_e$; ln	ln-Taste
2	Binärer Logarithmus	$\log_2$; lb	—

Multiplikation

Wird von einem Produkt der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Summe der einzelnen Faktoren.

Beispiel 2: $\log_{10}$ 1000
Bestimmen Sie den Logarithmus von 1000 zur Basis 10
a) mit dem Taschenrechner und
b) interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:
a) Eingabe: 1000 log oder log 1000 (taschenrechnerabhängig)
Anzeige: 3 $\Rightarrow \log_{10} 1000 = \mathbf{3}$
Wird der Wert 1000 faktorisiert, z. B. in $10 \cdot 100$, gilt Folgendes: $\log_{10} 1000 = \log_{10} (10 \cdot 100)$
$= \log_{10} 10 + \log_{10} 100 = 1 + 2 = \mathbf{3}$

b) $\log_{10} 1000 = 3$, denn $10^3 = \mathbf{1000}$

Quotient

Wird von einem Quotienten der Logarithmus gesucht, so ist dies gleich der Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner.

Bei der Berechnung eines Logarithmus kann die Eingabe der Gleichung, abhängig vom Taschenrechner, unterschiedlich sein.

Beispiel 3: Division
Berechnen Sie $\log_{10}\left(\frac{10}{100}\right)$ mit dem Taschenrechner.

Lösung: $\log_{10}\left(\frac{10}{100}\right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 100$
Eingabe: 10 log – 100 log =
Anzeige: 1 $\quad$ 2 $\quad$ –1
$\Rightarrow \log_{10} 10 - \log_{10} 100 = 1 - 2 = \mathbf{-1}$

oder durch Ausrechnen des Numerus $\left(\frac{10}{100}\right) = 0{,}1$
Eingabe: 0,1 log
Anzeige: –1
$\Rightarrow \log_{10} 0{,}1 = \mathbf{-1}$

Potenz

Soll der Logarithmus von einer Potenz genommen werden, so gibt es die Möglichkeit, die Potenz zu berechnen und dann den Logarithmus zu nehmen oder das Rechengesetz für Logarithmen anzuwenden und dann die Berechnung durchzuführen.

Beispiel 1: Berechnung einer Potenz
Berechnen Sie den Logarithmus der Potenz 10^2 zur Basis 10
a) durch Ausrechnen der Potenz und
b) durch Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen.

Lösung:
a) $\log_{10} 10^2 = \log_{10} 100 = \mathbf{2}$
b) $\log_{10} 10^2 = 2 \cdot \log_{10} 10 = 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

Beispiel 2: Berechnung einer Wurzel
Der Logarithmusterm $\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ ist zu berechnen
a) in Wurzelschreibweise,
b) in Potenzschreibweise.

Lösung:
$\sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} 10 = 1$ oder
$\log_{10} \sqrt[3]{1000}$ kann umgeformt werden in $\log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow \log_{10} \sqrt[3]{1000} = \log_{10} (1000)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{10} 1000$
$= \frac{1}{3} \cdot 3 = \mathbf{1}$

1.6.3 Basisumrechnung beim Logarithmus

Der Taschenrechner bietet zur Berechnung der Logarithmen nur die Basis 10 ($\log_{10} = \log$) und die Basis e ($\log_e = \ln$) an.

In der Physik oder Technik sind jedoch andere Basen erforderlich. Um Berechnungen mit dem Taschenrechner durchführen zu können, muss die Basis so umgeformt werden, dass Lösungen mit log oder ln möglich sind.

Beispiel 3: Logarithmus mit der Basis 2
Berechnen Sie $\log_2 8$ mit dem Taschenrechner.

Lösung:
Die Berechnung kann a) mit log oder b) mit ln durchgeführt werden.

a) $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log 8}{\log 2}$

Eingabe: z. B.	8 log :	2 log	=
	⇓	⇓	⇓
Anzeige:	0,903 089 987	0,301 029 995	3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0{,}903\,09}{0{,}301\,03} = \mathbf{3}$

b) $\log_2 8 = \frac{\log_e 8}{\log_e 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2}$

Eingabe: z. B.	8 ln :	2 ln	=
	⇓	⇓	⇓
Anzeige:	2,079 441 54	0,693 147 18	3

$\Rightarrow \log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2{,}079\,441\,54}{0{,}693\,147\,18} = \mathbf{3}$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}}$$

a, u Basen a, b Numerus (Zahl)

Bei der Basisumrechnung können die Basen der Logarithmen auf dem Taschenrechner verwendet werden. Es gilt:

$$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Aufgaben:

1. Die Gleichungen $x = \log_a b$ und $b = a^x$ sind gleichwertig. Geben Sie in der **Tabelle 1** für die Aufgaben a) bis d) jeweils die gleichwertige Beziehung und die Lösung an.

Tabelle 1: Gleichwertigkeit und Lösung

	$x = \log_2 8$	$8 = 2^x$	$8 = 2^3$	$x = 3$
a)	$x = \log_2 32$			
b)	$x = \log_2 \sqrt{2}$			
c)		$81 = 3^x$		
d)		$10^{-3} = 10^x$		

2. Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.
a) $\log_{10} 1$ **b)** $\log_{10} 10$ **c)** $\log_e 1$ **d)** $\log_3 \frac{1}{27}$

3. Zerlegen Sie die Logarithmenterme nach den gültigen Logarithmengesetzen.
a) $\log_a (3 \cdot u)$ **b)** $\log_a \frac{1}{u}$ **c)** $\log_a \frac{u^3}{v^2}$

4. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:
a) log 16 **b)** log 111 **c)** $\log 8^2$ **d)** $\log \sqrt{100}$
e) ln 16 **f)** ln 111 **g)** $2 \cdot \ln 8$ **h)** $\ln 8^2$

5. Mit dem Taschenrechner sind zu berechnen:
a) $\log_2 12$ **b)** $\log_3 12$ **c)** $\log_4 12$ **d)** $\log_5 12$

Lösungen:

1. a) $32 = 2^x$; $x = 5$ **b)** $\sqrt{2} = 2^x$; $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \log_3 81$; $x = 4$ **d)** $x = \log_{10} 10^{-3}$; $x = -3$

2. a) 0, denn $10^0 = 1$ **b)** 1, denn $10^1 = 10$
c) 0, denn $e^0 = 1$ **d)** –3, denn $3^{-3} = \frac{1}{27}$

3. a) $\log_a 3 + \log_a u$
b) $-\log_a u$
c) $3 \cdot \log_a u - 2 \cdot \log_a v$

4. a) 1,204 12 **b)** 2,045 32 **c)** 1,806 18 **d)** 1
e) 2,772 59 **f)** 4,709 53 **g)** 4,158 88 **h)** 4,158 88

5. a) 3,584 96 **b)** 2,261 86 **c)** 1,792 48 **d)** 1,543 9

 ⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 12]

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Gleichungen

1. Bestimmen Sie aus den Gleichungen die Lösung

a) $(x+2)^2 + 6 = x^2 + 20$ **b)** $\frac{4(17+20x)}{11} = 8$

c) $\frac{6(x+7)}{17(x-4)} = 1$ **d)** $\frac{4x}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2x+3}{4} + 6$

2. Lösen Sie die Gleichungen nach den geforderten Größen auf.

a) $F_1 = \frac{F_2 \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot R}$ Auflösen nach h und nach R

b) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ Auflösen nach h

c) $H = \frac{I \cdot N^2}{\sqrt{4r^2 + l^2}}$ Auflösen nach I und l

d) $A = \frac{l_1 + l_2}{2} b$ Auflösen nach l_2 und b

Definitions- und Lösungsmenge

3. Geben Sie die Definitionsmenge folgender Terme an.

a) $\sqrt{2x + 100}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{2x+100}}$ **c)** $\log_a (x+2)$

4. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und geben Sie die Lösung der Gleichung an.

a) $\frac{x-9}{x} = \frac{4}{5}$ **b)** $\frac{15ac}{x} = \frac{9bc}{6bd}$

c) $\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{x-11}$ **d)** $7 + 4 \cdot \sqrt{x+7} = 23$

Potenzen

5. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen nur mit positiven Exponenten.

a) $2 \cdot 10^{-2}$ **b)** min^{-1} **c)** $\frac{a^{-2} b\, c^2}{(a+b)^{-1}}$

6. Schreiben Sie die Potenzterme und physikalischen Benennungen mit umgekehrtem Exponenten.

a) 10^{-2} **b)** $\frac{1}{10^3}$ **c)** $\frac{1}{m}$ **d)** $\frac{V}{m}$

7. Geben Sie die Zahlen in Zehnerpotenzen an.

a) Rauminhalt der Erde:
1 083 000 000 000 000 000 000 m³

b) Oberfläche der Erde: 510 000 000 000 000 m²

c) Entfernung Erde–Sonne: 149 500 000 000 m

8. Vereinfachen Sie die Terme.

a) $\frac{(a+b)^0}{2^{-1}}$ **b)** $\frac{x \cdot x^{-2}}{(n^2 \cdot x)^{-1}}$ **c)** $\frac{x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot y^3}{y^{n+2} \cdot x^{m+2}}$

d) $\frac{n^{-2+x}}{n^{x-1}}$ **e)** $((n^{-2})^{-1}) \cdot n^{a-2}$ **f)** $\frac{(n^{-4} \cdot m^{-2})^{-3}}{(n^{-2}\, m^{-3})^5}$

9. Vereinfachen Sie die Wurzeln unter Verwendung der Potenzschreibweise.

a) $\sqrt[3]{\frac{x^{-3}}{x^{-9}}}$ **b)** $\sqrt[n+m]{(x^2)^{3n+3m}}$ **c)** $\sqrt[an]{3^{n(a+b)}}$

Logarithmengesetze

10. Geben Sie den Logarithmus an und überprüfen Sie die Ergebnisse durch Potenzieren.

a) $\log_{10} 100$ **b)** $\log_{10} 300$ **c)** $\log_e 2{,}71$ **d)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

11. Zerlegen Sie die Logarithmusterme in Summen, Differenzen und Produkte.

a) $\log_a (u^2)$ **b)** $\log_a \frac{m^2 \cdot \sqrt{n}}{p^3}$ **c)** $\log_a \sqrt[3]{n^2}$

12. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner

a) $3 \cdot \log 10$ **b)** $\log 8^4$ **c)** $\ln \sqrt[5]{500}$ **d)** $\ln 5^{30}$

13. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner

a) $\log_2 256$ **b)** $\log_7 4$ **c)** $\log_{16} 256$ **d)** $\log_8 \sqrt{6400}$

Lösungen:

1. **a)** $x = 2{,}5$ **b)** $x = \frac{1}{4}$ **c)** $x = 10$ **d)** $x = 25$

2. **a)** $h = \frac{F_1 2\pi R}{F_2}$; $R = \frac{F_2 h}{F_1 2\pi}$ **b)** $h = \frac{v^2}{2g}$

c) $I = \frac{H \cdot \sqrt{4r^2 + l^2}}{N^2}$; $l = \pm\sqrt{\frac{I^2 N^4}{H^2} - 4r^2}$

d) $b = \frac{2A}{l_1 + l_2}$; $l_2 = \frac{2A}{b} - l_1$

3. **a)** $x \geq -50$ **b)** $x > -50$ **c)** $x > -2$

4. **a)** $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $x = 45$

b) $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; b, d $\neq 0$; $x = 10ad$

c) $D = \{x|x \geq 11\}_{\mathbb{R}}$; $x = 15$

d) $D = \{x|x \geq -7\}_{\mathbb{R}}$; $x = 9$

5. **a)** $\frac{2}{10^2}$ **b)** $\frac{1}{\text{min}}$ **c)** $\frac{(a+b)bc^2}{a^2}$

6. **a)** $\frac{1}{10^2}$ **b)** 10^{-3} **c)** m^{-1} d) Vm^{-1}

7. **a)** $1{,}083 \cdot 10^{21}\,m^3$ **b)** $5{,}1 \cdot 10^{14}\,m^2$

c) $1{,}495 \cdot 10^{11}\,m$

8. **a)** 2 **b)** n^2 **c)** $\frac{1}{x^3}$ **d)** $\frac{1}{n}$ **e)** n^a **f)** $n^{22} \cdot m^{21}$

9. **a)** x^2 **b)** x^6 **c)** $3 \cdot \sqrt[a]{3^b}$

10. **a)** 2, denn $10^2 = 100$

b) 2,477, denn $10^{2{,}477} = 300$

c) 1, denn $e^1 = 2{,}718$

d) –5, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

11. **a)** $2 \cdot \log_a u$

b) $2 \cdot \log_a m + \frac{1}{2} \cdot \log_a n - 3 \cdot \log_a p$ **c)** $\frac{2}{3} \cdot \log_a n$

12. **a)** 3 **b)** 3,61235 **c)** 1,243 **d)** 48,283

13. **a)** 8 **b)** 0,7124 **c)** 2 **d)** 2,1073

⇒ [Weitere Aufgaben im Kapitel 12]

1.7 Funktionen und Gleichungssysteme

1.7.1 Rechtwinkliges Koordinatensystem

Durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem lassen sich Punkte in einer Ebene eindeutig festlegen. Das Koordinatensystem wird auch Achsenkreuz genannt. Die waagrechte Achse wird als x-Achse (Abszisse) und die senkrechte Achse als y-Achse (Ordinate) bezeichnet **(Bild 1)**. Der Ursprung des Koordinatensystems ist der Punkt O (0|0). Ein Punkt in einem Achsenkreuz wird durch jeweils einen Achsenabschnitt für jede Achse festgelegt. Der Abschnitt auf der x-Achse wird als x-Koordinate (Abszisse) und der Abschnitt auf der y-Achse als y-Koordinate (Ordinate) bezeichnet. Der Punkt P (3|2) hat die x-Koordinate $x_P = 3$ und die y-Koordinate $y_P = 2$ **(Bild 1)**.

Beispiel 1: Koordinatendarstellung
Welche Koordinaten hat der Punkt Q (–2|–3) ?

Lösung:
$x_Q = \mathbf{-2}$ und $y_Q = \mathbf{-3}$

Ein Achsenkreuz teilt eine Ebene in 4 Felder. Diese Felder nennt man auch Quadranten **(Bild 1)**. Die Quadranten werden im Gegenuhrzeigersinn mit den römischen Zahlen I bis IV bezeichnet. Für Punkte P (x|y) im ersten I. Quadranten gilt $x > 0 \wedge y > 0$. Im zweiten Quadranten gilt $x < 0 \wedge y > 0$, im dritten $x < \wedge\, y < 0$ und im vierten $x > 0 \wedge y < 0$.

Quadranten erleichtern die Zuordnung von Punkten.

Für viele physikalische Prozesse ist eine Darstellung im I. Quadranten ausreichend.

Beispiel 2: Leistungskurve
Ermitteln Sie die Leistung P in einem Widerstand mit 50 Ω mit $P = \frac{1}{R} \cdot U^2$, wenn die Spannung von 0 V in 1-V-Schritten auf 7 V erhöht wird.

Lösung:
Bild 2 und WerteTabelle 1:

U/V	0	1	2	3	4	5	6	7
P/W	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,5	0,72	0,98

Für räumliche Darstellungen werden Koordinatensysteme mit drei Koordinatenachsen verwendet. Diese werden z. B. mit x, y, z im Gegenuhrzeigersinn bezeichnet. In der Vektorrechnung werden die Bezeichnungen x_1, x_2, x_3 verwendet **(Bild 3)**. Der Punkt A wird mit A (1|0|0) bezeichnet.

Aufgaben:

1. Geben Sie je einen Punkt für jeden Quadranten zu **Bild 1** an.
2. Geben Sie die Vorzeichen der Punktemengen in den vier Quadranten an.

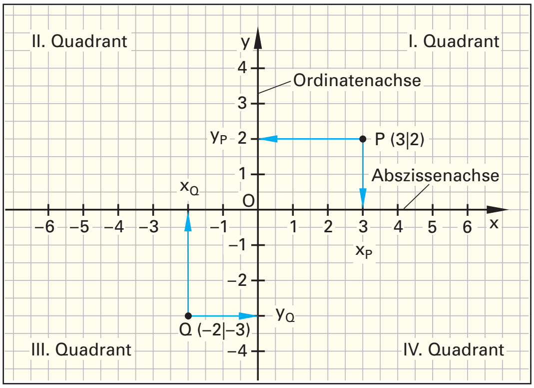

Bild 1: Zweidimensionales Koordinatensystem

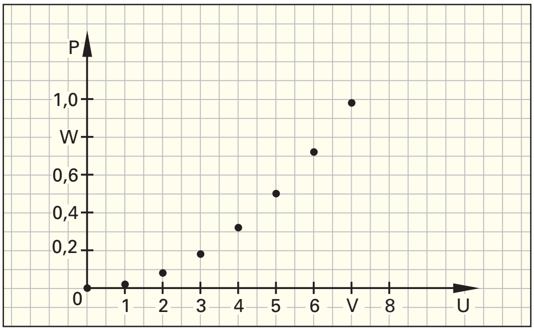

Bild 2: Leistungskurve im I. Quadranten

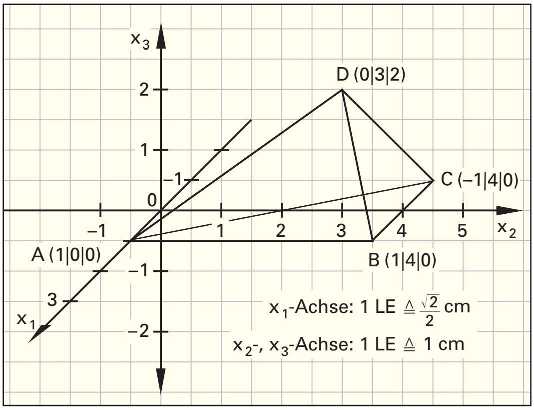

Bild 3: Dreidimensionales Koordinatensystem

Lösungen:

1. P_1 (1|1), P_2 (–2|1), P_3 (–2|–4), P_4 (2|–3)

2.

Quadrant	I	II	III	IV
x-Wert	> 0	< 0	< 0	> 0
y-Wert	> 0	> 0	< 0	< 0

1.7.2 Funktionen

Mengen enthalten Elemente. Man kann die Elemente einer Menge den Elementen einer anderen Menge zuordnen. Diese Zuordnung kann z. B. mit Pfeilen vorgenommen werden **(Bild 1)**. Mengen, von denen Pfeile zur Zuordnung ausgehen, nennt man Ausgangsmengen (Definitionsmengen D), Mengen in denen die Pfeile enden, Zielmengen (Wertemengen W). Die Elemente von D sind unabhängige Variablen, z. B. x, t. Die Menge W enthält die abhängigen Variablen, z. B. y, s.

Zuordnungen können durch Pfeildiagramme, Wertetabellen, Schaubilder oder Gleichungen dargestellt werden. Alle Pfeilspitzen, die z. B. in einem Element enden, fasst man als neue Menge, die Wertemenge, zusammen.

Führen von mindestens einem Element der Ausgangsmenge D Pfeile zu unterschiedlichen Elementen der Zielmenge W, liegt keine Funktion, sondern eine Relation vor.

Kann man jedem Element einer Ausgangsmenge genau ein Element der Zielmenge zuordnen, nennt man diese Relation eine Funktion.

Eindeutige Zuordnungen nennt man Funktionen.

Im Pfeildiagramm erkennt man eine Funktion daran, dass von jedem Element ihrer Ausgangsmenge genau ein Pfeil zur Zielmenge ausgeht.

Bestehen eindeutige Zuordnungsvorschriften, können Zuordnungsvorschriften als Terme angegeben werden. Die Elemente lassen sich dann nach derselben Vorschrift berechnen. Dies wird z. B. oft bei physikalischen Gesetzen angewendet.

Die grafische Darstellung einer Funktion heißt Schaubild, Graf oder Kurve.

Beispiel 1: Konstante Geschwindigkeit

Ein Motorrad fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 20\,\frac{m}{s}$. Stellen Sie

a) mit einer Wertetabelle den Weg s als Funktion der Zeit t mit der Funktion $s(t) = v \cdot t$ dar,

b) den Grafen (Schaubild) der Funktion im Koordinatensystem dar

Lösung:
a) **Bild 2,** b) **Bild 3**

Funktionen werden in der Mathematik mit Kleinbuchstaben wie f oder g bezeichnet. Ist x_0 ein Element der Ausgangsmenge D einer Funktion f, so schreibt man $f(x_0)$ für das dem x_0 eindeutig zugeordnete Element in der Zielmenge W und nennt $f(x_0)$ den Funktionswert der Funktion an der Stelle x_0. Ist z. B. $x_0 = 4$, so ist der Funktionswert an der Stelle 4: $f(4) = 80$ **(Bild 3)**. Für die Zuordnungsvorschrift einer Funktion verwendet man auch symbolische Schreibweisen **(Bild 4** und **Bild 5)**.

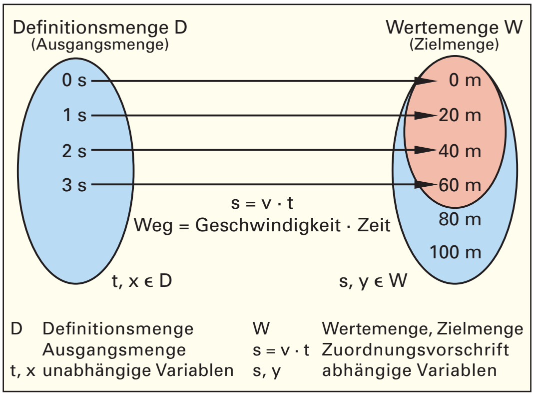

Bild 1: Elementezuordnung in Mengen mit dem Pfeildiagramm

x ≙ t in s	0	1	2	3	4	5
y ≙ s in m	0	20	40	60	80	100

Bild 2: Wertetabelle für das Weg-Zeit-Diagramm

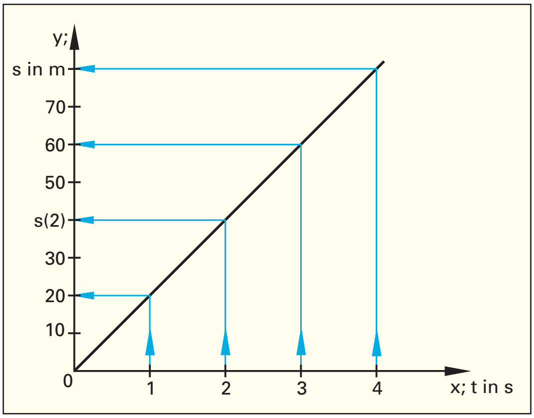

Bild 3: Wertetabelle und Schaubild des Weg-Zeit-Diagramms

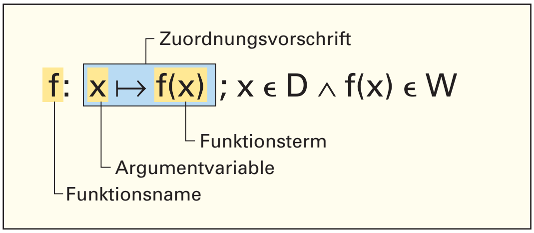

Bild 4: Allgemeine Zuordnungsvorschrift

Funktion als Zuordnung

$$f:\; x \mapsto f(x);\; x \in D \wedge f(x) \in W$$

Funktion als Gleichung

$$f \text{ mit } f(x) = y;\; x \in D \wedge f(x) \in W$$

Bild 5: Funktion als Zuordnung oder Gleichung

1.7.3 Lineare Funktionen

1.7.3.1 Ursprungsgeraden

Bei der Darstellung proportionaler Zusammenhänge in der Physik und der Mathematik kommen lineare Funktionen, z. B. in der Form $g(x) = m \cdot x$, vor. Das Schaubild einer linearen Funktion heißt Gerade.

Beispiel 1: Ursprungsgerade

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 1{,}5 \cdot x$.
Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen Sie das Schaubild von g.

Lösung: **Bild 1**

Überprüfen Sie, ob der Punkt P_1 (2|3) auf der Geraden g mit $g(x) = 1{,}5 \cdot x$ liegt. Dazu setzt man die feste Stelle $x_1 = 2$ in die Funktion ein und erhält $y_1 = g(2) = 3$. Der Punkt P (2|3) liegt also auf der Geraden g.

P_1 $(x_1|y_1)$ liegt auf g, wenn $y_1 = g(x_1)$ ist.

Geraden durch den Ursprung O (0|0) heißen Ursprungsgeraden. Die Schaubilder aller Ursprungsgeraden unterscheiden sich durch das Verhältnis von y-Wert Δy_1 zu x-Wert Δx_1. Dieses Verhältnis wird bei Ursprungsgeraden als Steigung $m = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$ bezeichnet. Die Steigung m lässt sich aus dem Steigungsdreieck mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen.

Beispiel 2: Steigung m

Bestimmen Sie die Steigungen der Geraden f, g und h in **Bild 2** mit jeweils einem Punkt P_1 und dem Ursprung.

Lösung:

f: $m = \frac{2}{5} = \mathbf{0{,}4}$ g: $m = \frac{3}{3} = \mathbf{1}$ h: $m = \frac{5}{1} = \mathbf{5}$

Das Verhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird auch Differenzenquotient genannt. Δy und Δx sind die Differenzen der Koordinatenwerte von P_1 $(x_1|y_1)$ und P_2 $(x_2|y_2)$.

Beispiel 3: Steigung aus Punktepaaren

Bestimmen Sie die Steigungen der Geraden f, g und h durch Bildung der Differenzwerte von jeweils zwei geeigneten Punktepaaren.

Lösung:

f: $m = \frac{2-1}{5-2{,}5} = \mathbf{0{,}4}$ g: $m = \frac{4-3}{4-3} = \mathbf{1}$

h: $m = \frac{5-2{,}5}{1-0{,}5} = \mathbf{5}$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Steigung für die Ursprungsgerade durch den Punkt P_3 in **Bild 1**.
2. Welche Steigung hat die Gerade durch P_1 (1|1) und P_2 (3|6) ?

$$g\colon y = m \cdot x \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m Steigung
Δx Differenz der x-Werte x_1, y_1 Koordinaten von P_1
Δy Differenz der y-Werte x_2, y_2 Koordinaten von P_2

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
g(x)	–6	–4,5	–3	–1,5	0	1,5	3	4,5	6

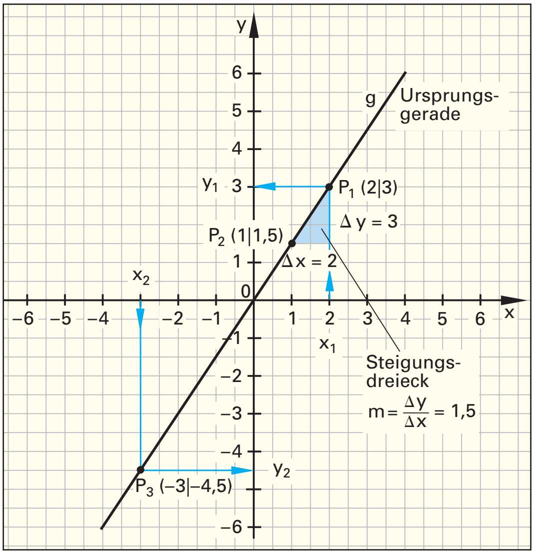

Bild 1: Wertetabelle und Schaubild der Ursprungsgeraden

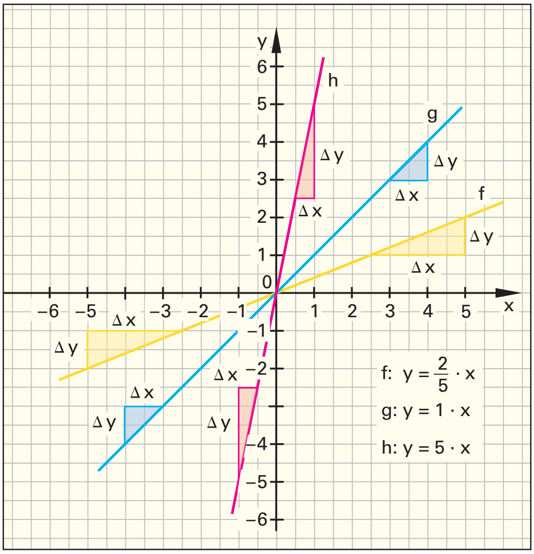

Bild 2: Ursprungsgeraden und Steigungen

Lösungen:
1. $m = \frac{-4{,}5}{-3} = \mathbf{1{,}5}$ **2.** $m = \mathbf{2{,}5}$

1.7.3.2 Allgemeine Gerade

Schaubilder von Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, haben Achsenabschnitte auf der x-Achse und der y-Achse.

Beispiel 1: Wasserbecken

Ein Wasserbecken mit der Füllhöhe $h_1 = 3$ m wird geleert **(Bild 1)**. Die Abflussmenge ist konstant. Bestimmen Sie die Geradengleichung mit der Steigung m aus den Punkten H_1 und H_2 und dem Achsenabschnitt b.

Lösung: $m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2-3}{3-0} = \frac{-1}{3}$; $b = 3 \Rightarrow y_1 = \mathbf{-\frac{1}{3}t + 3}$

Durch Verlängern der Geraden **(Bild 1)** erhält man den Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle) und damit die Entleerungszeit t in min. $0 = -\frac{1}{3}x + 3 \Leftrightarrow x = 9 \Rightarrow t = 9$ min.

Geradenschar

Je nach Füllhöhe h des Wasserbeckens ist die Entleerungszeit t unterschiedlich.

Beispiel 2: Geradenschar

Bild 2 enthält die Gerade für die Füllhöhe h_1.

a) Zeichnen Sie von dieser Geraden ausgehend, die Geraden für die Füllhöhen $h_2 = 1{,}5$ m und $h_3 = 6$ m durch Parallelverschieben in ein Schaubild.

b) Wie lauten die Gleichungen der Geraden für die Füllhöhen h_2 und h_3?

Lösung:

a) **Bild 2** b) $g_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}$ und $g_3(x) = \mathbf{-\frac{1}{3}x + 6}$

Geradenscharen haben die gleiche Steigung m aber unterschiedliche Achsenabschnitte.

Geraden mit verschiedenen Steigungen und einem gemeinsamen Schnittpunkt S nennt man auch Geradenbüschel.

Beispiel 3: Unterschiedliche Abflussmenge im Wasserbecken

Die Abflussmenge wird a) verdoppelt, b) halbiert. Berechnen Sie die Auslaufzeiten für beide Fälle.

Lösung:

a) $0 = \frac{-2}{3}x + 3 \Rightarrow x = 4{,}5 \Rightarrow t =$ **4,5 min**

b) $0 = \frac{-1}{6}x + 3 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow t =$ **18 min**

Orthogonale Geraden

Den Winkel zwischen einer Geraden und der x-Achse erhält man mit $m = \tan\alpha$. Die Gerade g_6 **(Bild 3)** hat die Steigung $m = 1$, also ist $\tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan(1) \Rightarrow \alpha = 45°$. Zur Prüfung, ob zwei Geraden senkrecht aufeinander stehen, verwendet man die Formel $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Beispiel 4: Orthogonale Geraden

Zeigen Sie, dass die Geraden g_6 mit $y = x + 3$ und g_7 mit $y = -x + 3$ senkrecht aufeinander stehen **(Bild 3)**.

Lösung: $m_6 = 1$, $m_7 = -1 \Rightarrow m_6 \cdot m_7 = 1 \cdot (-1) = \mathbf{-1}$

$g: y = m \cdot x + b$ $m = \tan\alpha$ mit $g \perp h$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

x	Abszissenwert	m	Steigung
y	Ordinatenwert	g, h	Geraden
b	Achsenabschnitt auf der y-Achse		
α	Winkel zwischen Gerade und x-Achse		

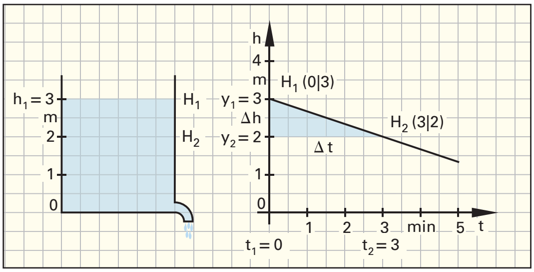

Bild 1: Entleerung eines Wasserbeckens

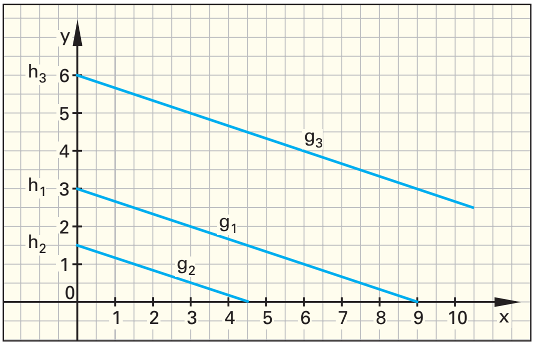

Bild 2: Geradenschar

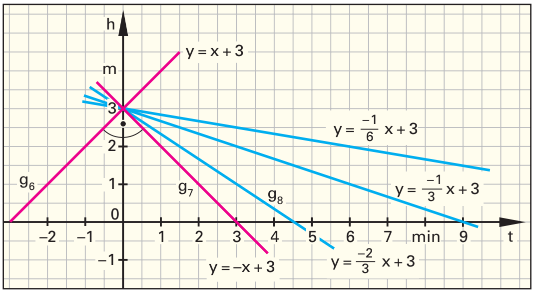

Bild 3: Geradenbüschel und orthogonale Gerade

Aufgaben:

1. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_6: $y = \frac{-1}{3}x + 3$ mit der x-Achse **(Bild 3)**.
2. Wie wirkt sich die Halbierung der Auslaufmenge **(Bild 3)** auf die Gleichung der Geraden aus?

Lösungen:

1. $y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 9 \Rightarrow N(9|0)$
2. Die Steigung wird doppelt so groß, die Auslaufzeit halbiert.

Überprüfen Sie Ihr Wissen!

Rechtwinkliges Koordinatensystem

1. Geben Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders **Bild 1** an.

Ursprungsgeraden

2. Bestimmen Sie

a) aus der Wertetabelle die Gleichung der Geraden.

x	0	1	2	3	4	5	…
f(x)	0	–2	–4	–6	–8	–10	…

b) Welche Werte y ergeben sich für x = –1, –2, –3?

3. Prüfen Sie, ob die Punkte P (2|–3) und Q (–3|–4,5) auf der Geraden $y = \frac{3}{2} \cdot x$ liegen.

Allgemeine Geraden

4. Erstellen Sie den Funktionsterm der linearen Funktion, deren Schaubild

a) die Steigung 5 hat und durch den Punkt (2|–4) geht;

b) durch die Punkte P (–1|–5) und Q (4|7) geht.

5. Die Gerade g geht durch die Punkte P (2|3) und Q (4|2), die Gerade h durch den Punkt A (2|1) mit der Steigung m = 2.

a) Bestimmen Sie die Funktionsterme der zugehörigen Funktionen,

b) berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen.

c) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h.

6. Ein Parallelogramm hat die Eckpunkte A (2|1), B (8|1), C (9|5) und D (3|5).

a) Geben Sie die vier Geradengleichungen durch die Eckpunkte an.

b) Bestimmen Sie die Funktionsterme der Funktionen der Diagonalen.

c) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.

7. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die auf der Geraden mit der Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ senkrecht steht und durch den Punkt P (1|4) geht.

8. Ein Auto, das für 16 000 € beschafft wurde, wird mit 15 % jährlich linear abgeschrieben.

a) Stellen Sie die Funktion auf, die den Buchwert des Autos in Abhängigkeit von seinem Alter beschreibt.

b) Nach wie viel Jahren ist das Auto ganz abgeschrieben?

c) Nach welcher Zeit beträgt der Buchwert 24 % des Beschaffungswertes?

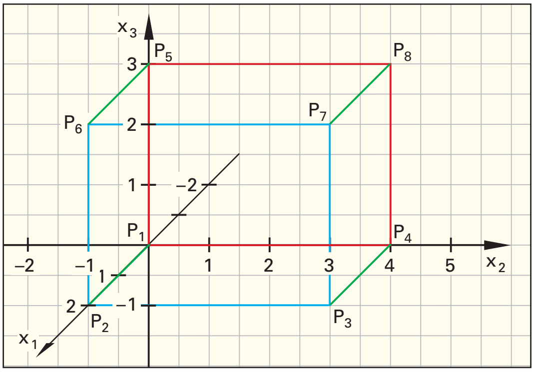

Bild 1: Quader

9. Die Gerade f hat die Steigung m = 0,5 und geht durch den Punkt P (1|1).

a) Zeichnen Sie das Schaubild.

b) Ergänzen Sie das Schaubild mithilfe der parallelen Geraden g und h zur Geradenschar, dass g eine Einheit oberhalb und h eine Einheit unterhalb von f verläuft.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf der Geraden f steht und durch den Punkt Q (3|2) geht.

d) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Geraden g und h.

Lösungen:

1. P_1 (0|0|0), P_2 (2|0|0), P_3 (2|4|0), P_4 (0|4|0), P_5 (0|0|3), P_6 (2|0|3), P_7 (2|4|3), P_8 (0|4|3).

2. a) $y = -2 \cdot x$
b) $x = 1 \Rightarrow y = 2$; $x = 2 \Rightarrow y = 4$; $x = 3 \Rightarrow y = 6$

3. P nein; Q ja

4. a) $f(x) = 5 \cdot x - 14$ **b)** $g(x) = 2{,}4 \cdot x - 2{,}6$

5. a) $g(x) = -0{,}5 \cdot x + 4$; $h(x) = 2 \cdot x - 3$
b) für $g(x) \Rightarrow x = 8$; für $h(x) \Rightarrow x = 1{,}5$
c) S (2,8|2,6)

6. a) f: y = 5, g: y = 1, h: $y = 4 \cdot x - 7$; i: $y = 4 \cdot x - 31$
b) $d_1(x) = \frac{4}{7} \cdot x - \frac{1}{7}$, $d_2(x) = -\frac{4}{5} \cdot x + \frac{37}{5}$
c) S (5,5|3)

7. h(x): $y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{14}{3}$

8. a) $k(x) = -2400 \cdot x + 16000$
b) $x = 6\frac{2}{3}$ Jahre **c)** x = 5,06 Jahre

9. a) $f(x) = 0{,}5 \cdot x + 0{,}5$; $g(x) = 0{,}5 \cdot x + 1{,}5$; $h(x) = 0{,}5 \cdot x - 0{,}5$ **b)** $y = -2 \cdot x + 8$
c) $g(x) \Rightarrow x = 2{,}6$; $y = 2{,}8$; $h(x) \Rightarrow x = 3{,}4$; $y = 1{,}2$